

УДК 519.6:533.7  
ББК 22.193

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПАДЕНИИ ВИХРЕВОГО ОБЛАКА НА НАКЛОННУЮ ПЛОСКОСТЬ

*А.С. Демин*

В данной работе рассматривается задача о падении газопылевого облака на наклонную плоскость. В такой постановке задача является существенно трехмерной и решается численно с применением трехмерной  $W$ -модификации метода Годунова. Показано, что рельеф поверхности земли оказывает значительное влияние на растекание падающего вихревого кольца.

*Ключевые слова:* газопылевое облако, вихревое кольцо,  $W$ -модификация метода Годунова.

### Введение

В последние годы наблюдается повышенный интерес к исследованию газодинамических течений, имеющих место в атмосфере Земли. Быстрый прогресс в развитии методов численного моделирования применительно к задачам газовой динамики, гидродинамики, конвекции, механики многофазных сред позволяет исследовать течения в тех диапазонах параметров, где неприменимы аналитические решения.

Большинство работ, в которых рассматриваются газодинамические течения в атмосфере, посвящены исследованию эволюции вихревого кольца, образующегося в результате подъема термика. В работе [6] расчеты проводились на основе уравнений идеального совершенного газа, и была рассчитана начальная стадия формирования вихревого кольца. Использование осесимметричной постановки в работах [1; 9] дает возможность изучить основные характеристики эволюции облака.

Для более сложных задач необходимо рассматривать движение вихревого кольца в трехмерной постановке. Этому посвящено множество работ. В [2] рассмотрено взаимодействие термиков с ветром. В [8] исследовано взаимодействие двух и более вихревых колец.

Большой интерес представляют задачи, в которых рассматривается эволюция запыленного облака [4]. Моделирование подобных явлений – весьма актуальная проблема, поскольку загрязнение атмосферы может привести к глобальным климатическим изменениям. В работах [10; 11] проведено численное моделирование падения облака нагретых частиц на горизонтальную плоскость. В частности, было получено, что силы гравитации приводят к делению нагретого облака на две части, одна из которых падает на поверхность, а другая поднимается вверх.

В данной работе рассматривается падение газопылевого облака на наклонную плоскость. В такой постановке задача является существенно трехмерной.

## 1. Постановка задачи и основные уравнения

Рассматривается задача о погружении запыленного облака в неоднородной атмосфере под действием силы тяжести. В начальный момент времени однородное облако запыленного газа диаметра  $d$  покоится на некоторой высоте  $H$ . Предполагается, что плотность среды облака больше плотности окружающего воздуха. Под действием силы тяжести оно начинает двигаться вниз и деформироваться. Аналогичная задача в двумерной постановке была рассмотрена в [7].

Падение облака происходит на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол  $\alpha$  (рис. 1). В такой постановке задача является существенно трехмерной. В процессе погружения запыленного облака формируется вихревое кольцо, при взаимодействии которого с земной поверхностью образуется интенсивный разбегающийся от эпицентра падения вихревой вал.

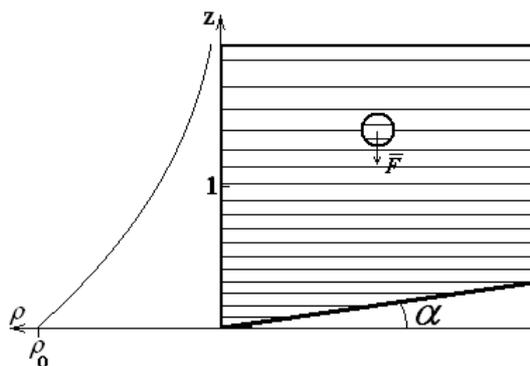


Рис. 1. Начальная конфигурация задачи о падении облака на наклонную плоскость в неоднородной атмосфере ( $\Delta\rho = 0,05$ )

Нестационарные уравнения движения облака и окружающего воздуха выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \gamma &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \vec{F}, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}[(e + p) \vec{v}] &= \rho \vec{F} \cdot \vec{v}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $p$  – давление среды;  $\rho$  – суммарная плотность воздуха и пыли;  $\vec{v}$  – вектор скорости;  $e = p/(\gamma - 1) + 0.5\rho(u^2 + v^2 + w^2)$  – полная энергия единицы объема среды;  $\vec{F} = (0, 0, -g)$  – вектор внешних сил;  $g$  – ускорение силы тяжести. Система (1) представляет собой замкнутую систему дифференциальных уравнений относительно искомых функций  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $p$  и  $\vec{v}$ .

Рассмотрим политропную модель атмосферы [3]. Связь между локальным показателем политропы  $n(z)$  и температурой:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{R} \frac{n(z) - 1}{n(z)},$$

откуда

$$T(z) = T_0 \left( 1 - \frac{\rho_0 g}{p_0} \int_0^z \frac{n(z) - 1}{n(z)} dz \right).$$

Атмосфера предполагается устойчивой, то есть  $n(z) = \text{const} = 1,4$ . В этом случае температура с высотой убывает по линейному закону:

$$T(z) = T_0 - \Delta \cdot z,$$

где коэффициент  $\Delta$

$$\Delta = \frac{n-1}{n} \frac{g}{R} - \text{величина, на которую убывает температура при подъеме на 1 м. При } n = 1,4$$

уменьшение температуры с высотой составляет  $10 \text{ }^\circ\text{K/км}$ .

В качестве безразмерных величин за единицу плотности рассматривалась плотность на поверхности Земли  $\rho_0$ , за единицу скорости – скорость звука на поверхности Земли. Единица длины соответствует  $10 \text{ км}$ , единицей времени является отношение единицы длины к единице скорости.

## 2. Особенности численного метода

Численное решение уравнений осуществлялось с помощью трехмерной W-модификации схемы Годунова [5], которая была обобщена на случай смеси двух совершенных газов с переменным показателем адиабаты  $\gamma$ .

Для этого запишем дивергентную форму уравнений газовой динамики

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{R},$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \alpha \rho \\ \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \alpha \rho u \\ \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ (e + p)u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \alpha \rho v \\ \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ (e + p)v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \alpha \rho w \\ \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ (e + p)w \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\rho g \\ -\rho g w \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь  $\alpha = 1/(\gamma - 1)$ . Использование первого уравнения в (2) для величины  $\alpha$ , входящей в выражение энергии  $e = p/(\gamma - 1) + 0.5\rho\bar{v}^2$ , позволяет существенно повысить точность расчетов на контактном разрыве между газами. Этот прием хорошо освещен в [12].

В качестве граничных условий на правой вертикальной границе ставились условия симметрии. Нижняя горизонтальная граница является поверхностью Земли. Для нее обычные классические условия непротекания не совсем годятся. Нужно учитывать существующий градиент давления таким образом, чтобы поток массы, импульса и энергии через горизонтальную

поверхность был равен нулю. В этом случае задавались фиксированные градиенты давления и плотности, полученные из начальных условий. Аналогично нужно учитывать наличие градиента давления на верхней границе сетки.

Свободная граница при длительных расчетах для дозвуковых течений может генерировать флуктуации. Для их погашения на левой вертикальной границе был добавлен демпферный слой из нескольких десятков ячеек с увеличивающимся шагом, где расчет проводился по обычной схеме. Однако это позволило отодвинуть границу так, чтобы ее влияние на ту расчетную область, где исследуется течение, было минимальным.

**Использование диагональных шаблонов.** На рисунке 2а изображены изолинии плотности с шагом  $\Delta\rho = 0,025$  в плоскости  $z = 0$  при падении облака на горизонтальную плоскость. Решение в данном случае должно быть симметричным, а изолинии плотности на нижней поверхности должны представлять собой концентрические окружности. Однако симметрия нарушается. Объяснить данный факт можно тем, что при численном моделировании при вычислении параметров в ячейке используются только шесть соседних ячеек (рис. 3а). Для предотвращения этого численного эффекта использовались шаблоны с привлечением диагональных ячеек (рис. 3б–г). Результат использования упомянутых шаблонов можно видеть на рисунке 2б.

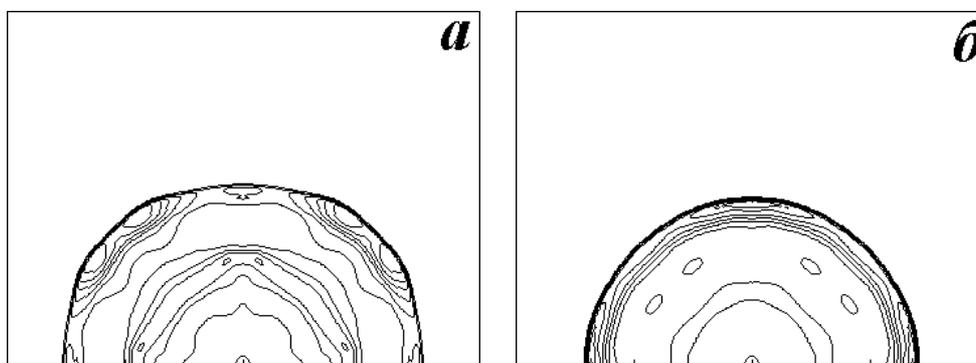


Рис. 2. Результат использования диагональных шаблонов. Изображены изолинии плотности с шагом  $\Delta\rho = 0,025$  в плоскости  $z = 0$  на момент времени  $t = 8$

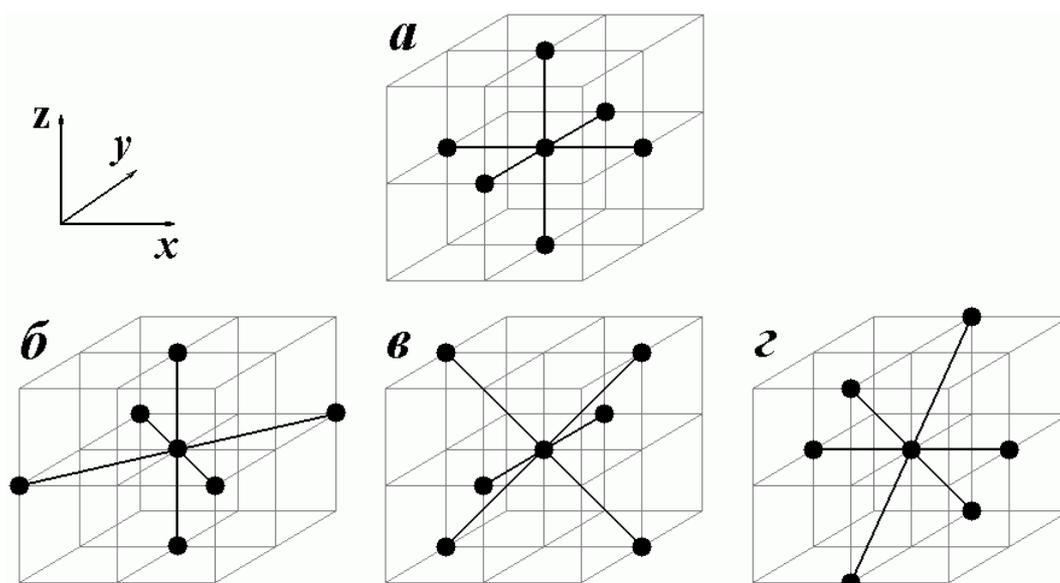


Рис. 3. Традиционный шаблон и шаблоны с привлечением диагональных ячеек в плоскостях  $xy$ ,  $xz$  и  $yz$

### 3. Результаты численного эксперимента

Численное моделирование проводилось на основе трехмерной W-модификации метода Годунова. Расчетная область составляла  $2 \times 1,5$  единиц на нижней поверхности и 1,5 единиц по высоте (то есть  $20 \text{ км} \times 15 \text{ км} \times 15 \text{ км}$ ) и покрывалась сеткой размером  $192 \times 144 \times 144$  ячеек.

Расчеты проводились для следующего диапазона исходных параметров:

- диаметр облака  $d = 0,14$ ;
- начальное положение облака  $H = 1$ ;
- показатель адиабаты газопылевой смеси облака  $\gamma_c = 1,1$ ;
- отношение плотности облака к плотности окружающей атмосферы  $\sigma = \rho_c / \rho_a = 1,4$ ;
- угол наклона плоскости  $\alpha = 1, 2, 4$ .

На рисунке 4 представлены результаты расчетов течения при падении запыленного облака на наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha = 2$  с горизонтом, на различные моменты времени.

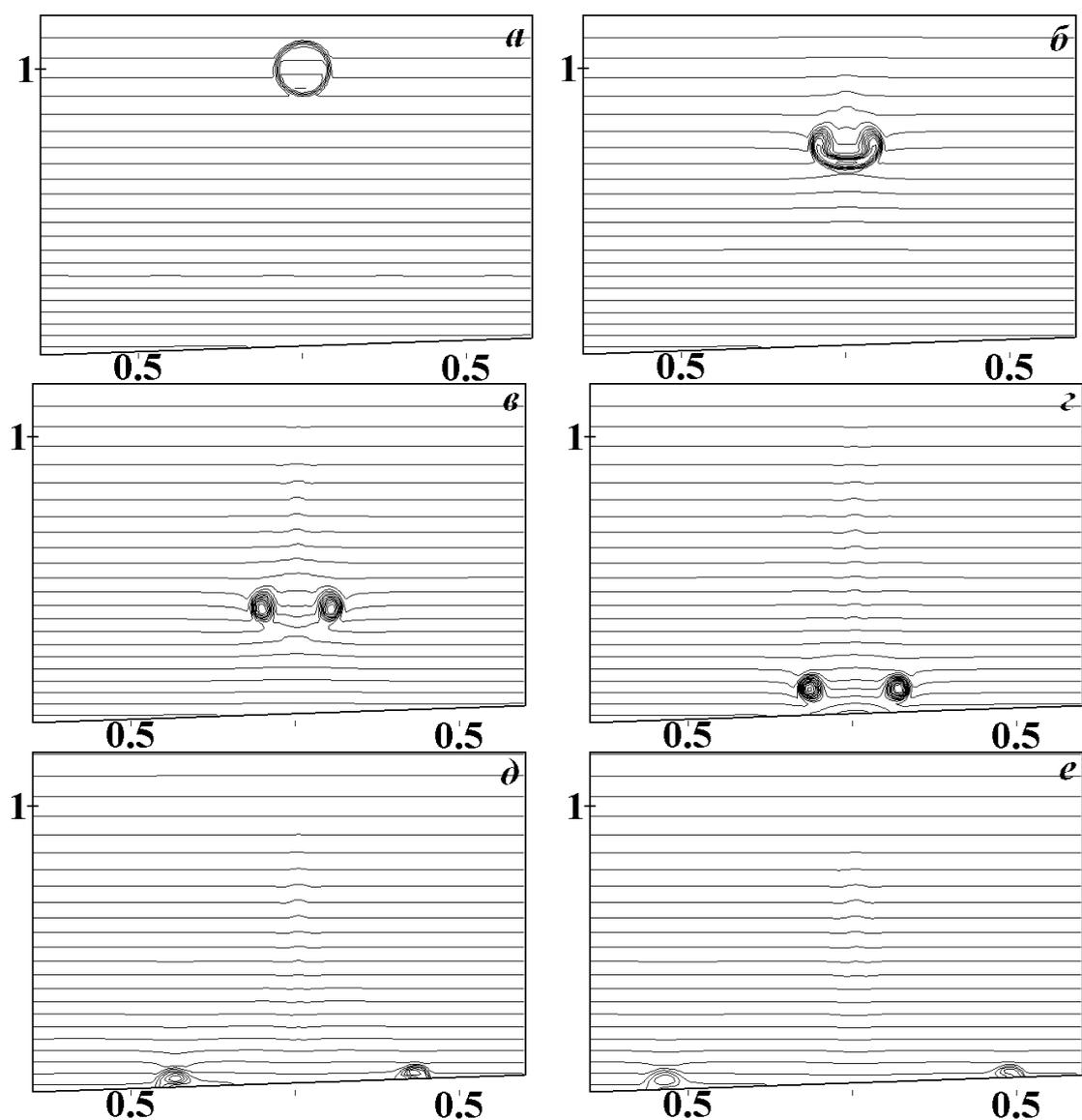


Рис. 4. Изолинии плотности течения при падении облака на наклонную плоскость в сечении  $y = 0$  на различные моменты времени  $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$  для случая  $\alpha = 2$ .

Дискретность изолиний  $\Delta\rho = 0.03$

Горизонтальные линии представляют собой изолинии плотности неоднородной атмосферы в сечении  $y = 0$ . В начальный момент времени  $t = 0$  облако покоится и находится на высоте  $H = 1$ , что соответствует 10 км (рис. 4а). Под действием силы земного притяжения облако начинает погружаться и деформироваться (рис. 4б). В процессе падения происходит закручивание краев с последующей эволюцией облака в тороидальное образование. Формируется вихревое кольцо (рис. 4в–г), которое взаимодействует с земной поверхностью. После столкновения образуется небольшой вихрь, распространяющийся радиально от эпицентра падения с дозвуковой скоростью (рис. 4д–е).

На рисунке 5 изображены изолинии плотности (рис. 5а, в, д, ж) и распределение величины динамического напора (рис. 5б, г, е, з) на поверхности Земли в различные моменты времени.

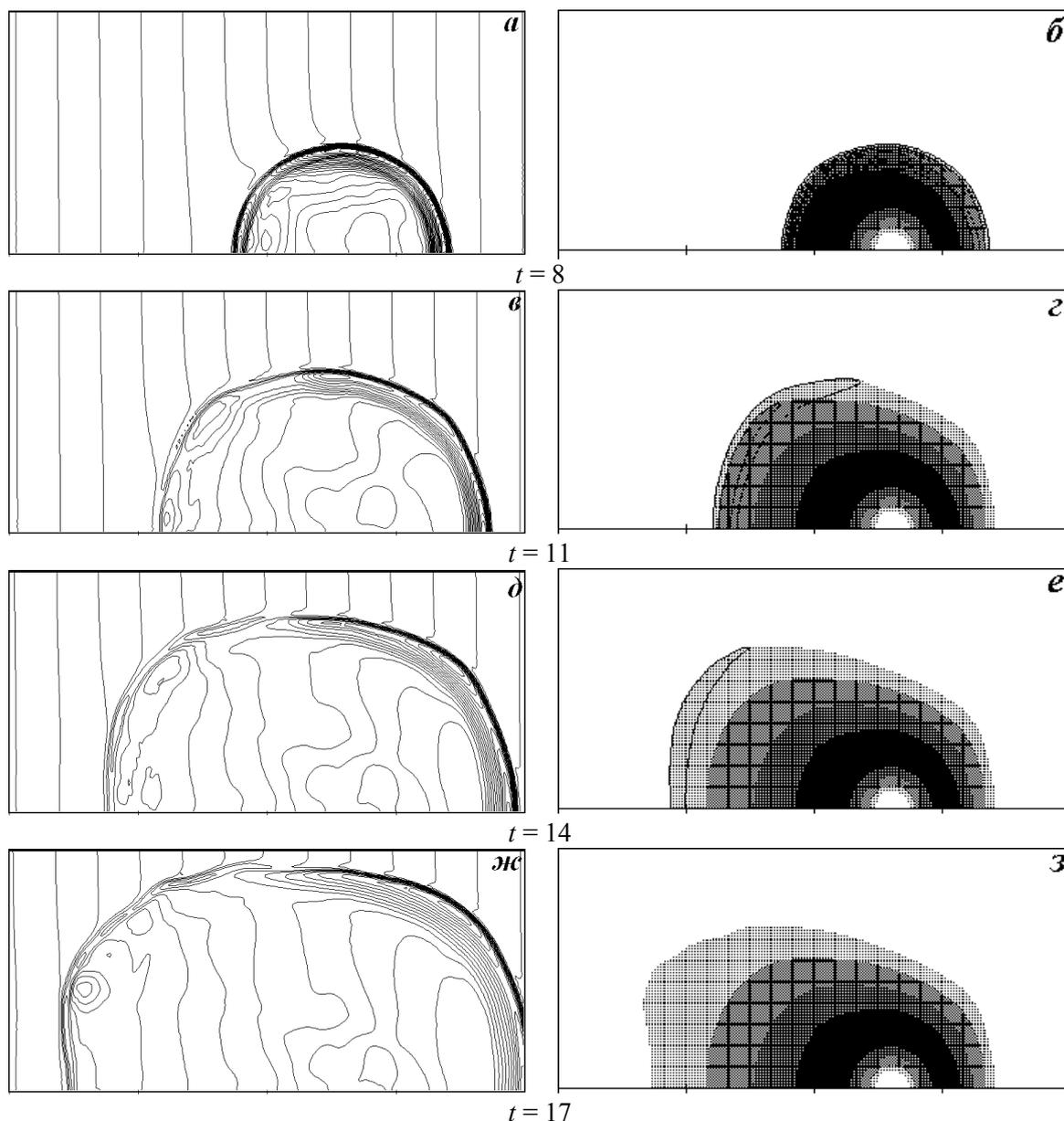


Рис. 5. Изолинии плотности (слева) с шагом  $\Delta\rho = 0,005$  и распределение величины динамического напора  $\rho v^2$  (справа) на поверхности земли на различные моменты времени для случая  $\alpha = 2$

Различия в цветовой гамме для величины динамического напора отражают разную степень интенсивности этой величины (для самой темной закрашки –  $\rho v^2 > 0,16$ , для самой светлой –  $0,04 > \rho v^2 > 0,02$ ). Величина  $\rho v^2 = 0,02$  приблизительно соответствует скорости газа на земной поверхности, равной 42 м/с. Поэтому образуемый самой слабой закрашкой контур ограничивает область возможных разрушений. И по изолиниям плотности, и по конфигурации области вывала видно, что наклон плоскости, на которую падает запыленное облако, приводит к неравномерному растеканию газа по поверхности земли.

На рисунке 6 изображено распределение величины динамического напора на поверхности земли в различные моменты времени для случая, когда угол наклона плоскости по отношению к горизонту составляет четыре градуса.

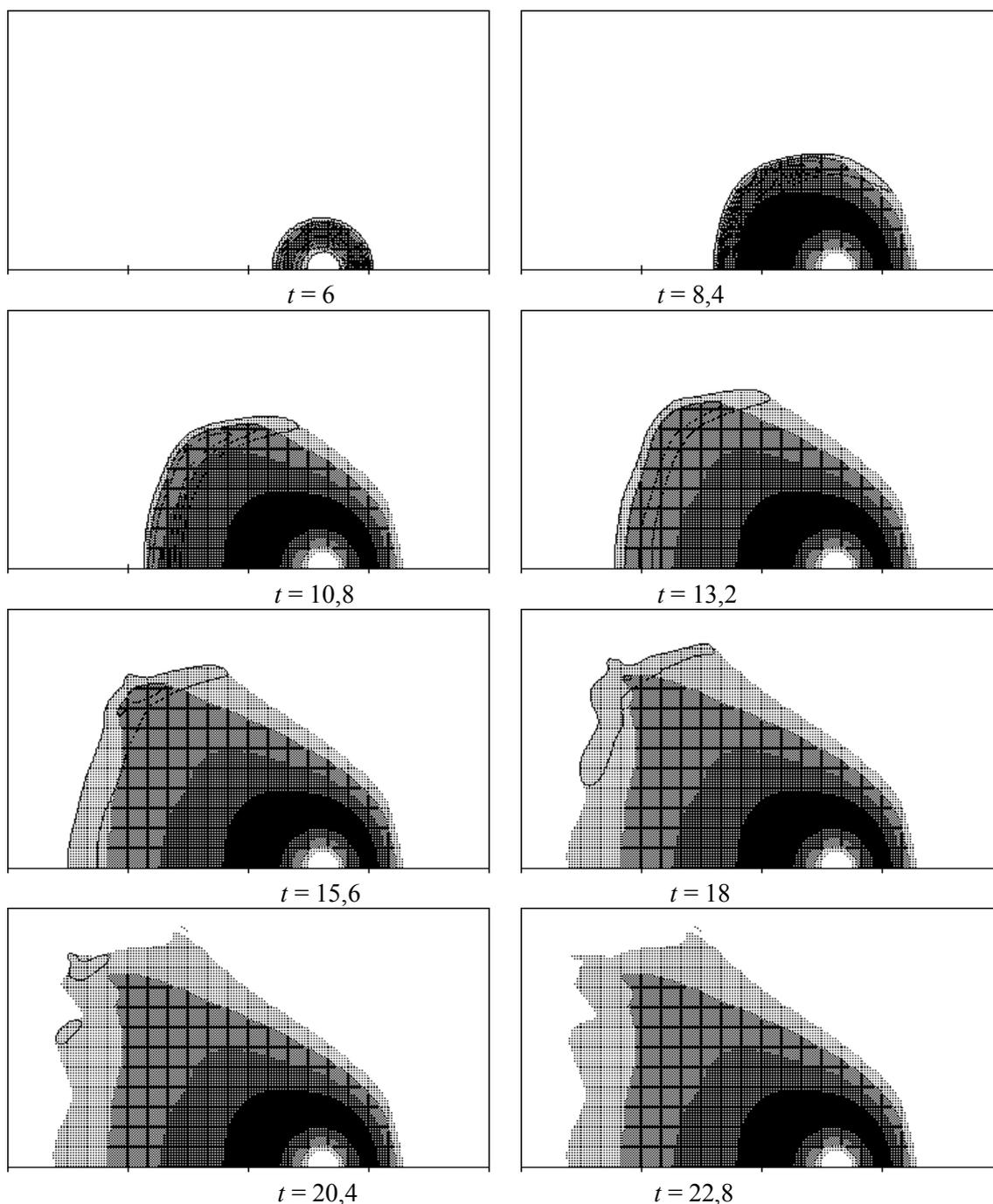


Рис. 6. Распределение величины динамического напора  $\rho v^2$  на поверхности земли на различные моменты времени для случая  $\alpha = 4$

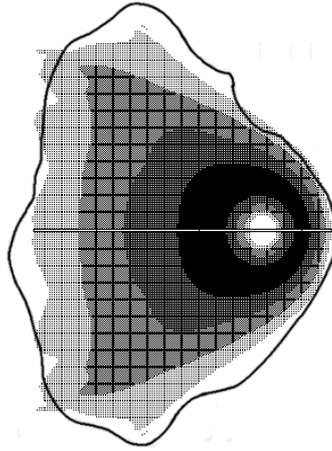


Рис. 7. Конфигурация области вывала леса, рассчитанная по критерию максимального скоростного напора для случая  $\alpha = 4$ , и реальная область вывала леса в Тунгусской катастрофе (сплошная линия)

На рисунке 7 приведена конфигурация области вывала леса, рассчитанная по критерию максимального скоростного напора для случая  $\alpha = 4$ , и, для сравнения, реальная область вывала леса в Тунгусской катастрофе (сплошная линия). В данном случае полученная в расчетах конфигурация отличается от того, что имело место в Тунгусской катастрофе, однако из рисунков 5, 6 и 7 ясно, что угол наклона плоскости будет очень сильно влиять на форму области вывала леса.

В заключение отметим, что реальные особенности рельефа местности в эпицентре падения вихря приведут к формированию наблюдаемой конфигурации вывала леса в Тунгусской катастрофе.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андрущенко, В. А. Образование кольцевого вихря при подъеме нагретой массы воздуха в стратифицированной атмосфере / В. А. Андрущенко // МЖГ. – 1978. – № 2. – С. 186–189.
2. Андрущенко, В. А. Дрейф крупномасштабных горячих термиков в стратифицированных воздушных потоках / В. А. Андрущенко, Л. А. Чудов // МЖГ. – 1984. – № 6. – С. 173–176.
3. Баранов, В. Б. Гидроаэромеханика и газовая динамика / В. Б. Баранов. – Ч. 1. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1987. – 184 с.
4. Будыко, М. И. Глобальные климатические катастрофы / М. И. Будыко, Г. С. Голицын, Ю. А. Израэль. – М. : Гидрометеиздат, 1986. – 159 с.
5. Васильев, Е. И. Трехмерное обобщение для W-модификации метода Годунова / Е. И. Васильев, А. С. Демин // ЖВМ и МФ. – 2008. – Т. 48, № 9. – С. 1659–1672.
6. Глаголева, Ю. П. Образование кольцевого вихря при всплывании легкого газа в тяжелом / Ю. П. Глаголева, В. А. Жмайло, В. Д. Мальшакова [и др.] // Численные методы механики сплошных сред. – 1974. – Т. 5. – С. 38–52.
7. Демин, А. С. Применение W-модификации метода Годунова при моделировании газодинамических течений в неустойчивой атмосфере / А. С. Демин, Е. И. Васильев // Вестн. ВолГУ. Сер. 1, Математика. Физика. – 2007. – Вып. 11. – С. 88–99.
8. Затевахин, М. А. Численное моделирование процесса всплывания системы высокотемпературных турбулентных термиков в неоднородной сжимаемой атмосфере / М. А. Затевахин, А. Е. Кузнецов, Д. А. Никулин, М. Х. Стрелец // Теплофизика высоких температур. – 1994. – Т. 32, № 1. – С. 44–56.

9. Кудряшов, Н. А. Влияние высоты однородной атмосферы на динамику всплывания термика / Н. А. Кудряшов, В. М. Простокишин // Изв. АН СССР. – 1985. – № 6. – С. 582–588.
10. Махвиладзе, Г. М. О движении совокупности частиц под действием силы тяжести и ее осаждении на плоскую горизонтальную поверхность / Г. М. Махвиладзе, О. И. Мелихов // МЖГ. – 1982. – № 6. – С. 64–73.
11. Махвиладзе, Г. М. Движение облака нагретых частиц над горизонтальной поверхностью в поле внешней силы / Г. М. Махвиладзе, О. И. Мелихов // Прикладная механика и техническая физика. – 1983. – № 5. – С. 115–121.
12. Jenny, P. Correction of conservative Euler solvers for gas mixtures / P. Jenny, B. Muller, H. Thomann // J. Comput. Phys. – 1997. – V. 132. – P. 91–107.

## THE DECISION OF THE PROBLEM OF VERTICAL CLOUD FALLING TO THE INCLINED PLANE

*A.S. Demin*

In this work the problem about falling vortical cloud to the inclined plane is considered. In such statement the problem is essentially three-dimensional and dares numerically with application of three-dimensional W-modification of a Godunov method. It is shown that the relief of a surface of the earth makes considerable impact on spreading a falling vortical ring.

**Key words:** *vortical cloud, vortical ring, W-modification of a Godunov method.*